Eine einfache Methode zur Bestimmung des Bahnradius eines Planetoiden

Von Eckhardt Schön, Erfurt

Mit 1 Abbildung

Die Bewegung der Planeten und Kleinkörper des Sonnensystems verläuft scheinbar zweidimensional an der uns umgebenden Himmelssphäre. Es ist deshalb offenbar ein recht schwieriges Unterfangen, aus wenigen Beobachtungen auf die Entfernung dieser Körper zu schließen. In der Tat ist die genaue Abstandsbestimmung bei einem bislang unbekannten Himmelskörper das Ergebnis einer sehr aufwendigen Rechnung. Verschiedene Methoden findet man in K. STUMPFF: Himmelsmechanik, Band I, Berlin 1959.

Grundgedanken

Hier soll eine wesentlich einfachere Methode vorgestellt werden, welcher jedoch starke Vereinfachungen zugrunde liegen. Sie liefert deshalb nur Näherungswerte für den Abstand eines Kleinkörpers von der Sonne. Trotzdem stellt sie für einen Amateurastronomen ein nützliches und handhabbares Hilfsmittel dar, um aus zwei Positionsbestimmungen eines Planetoiden oder Kometen auf seine ungefähre Entfernung von der Sonne zu schließen.
Die Herleitung der Rechenvorschrift verlangt keine Kenntnisse der Differentialrechnung und ist

deshalb leicht nachzuvollziehen.

Um das komplizierte dreidimensionale Bewegungsproblem zu vereinfachen, machen wir folgende Annahmen:

1. Der Planetoid bewegt sich in der Ebene der Ekliptik (d.h. ekliptikale Breite $\beta = 0°$).
2. Die Erde und der Planetoid bewegen sich auf konzentrischen Kreisen um die Sonne und haben deshalb eine konstante Geschwindigkeit.
3. Der Planetoid befindet sich außerhalb der Erdbahn.

Es ist hier immer von einem Planetoiden die Rede, weil für diese Gruppe von Körpern die gemachten Annahmen am ehesten zutreffen. Die Ephemeriden der großen Planeten können in astronomischen Jahrbüchern nachgeschlagen werden und müssen deshalb von einem Amateurastronomen kaum berechnet werden, während Kometen sich zumeist auf stark elliptischen Bahnen mit erheblicher Neigung zur Ekliptik bewegen. So sind Planetoiden die geeignetsten Objekte für das vorgestellte Verfahren, obwohl auch sie die gemachten Annahmen in recht unterschiedlichem Maß erfüllen.

Ableitung der Iterationsformel

Die oben gemachte *Annahme 1* reduziert das Problem auf eine zweidimensionale Bewegung in der Ebene der Ekliptik, weshalb wir bei der folgenden Ableitung lediglich die ebene Geometrie verwenden müssen. Die scheinbare Position des Planetoiden kann durch nur eine Koordinate, die ekliptikale Länge λ_P, beschrieben werden. Die Abbildung zeigt die geometrischen Verhältnisse in der Ekliptik und definiert die Symbole.

Das Widderzeichen Y zeigt die Richtung zum Frühlingspunkt an. S, P und E kennzeichnen Sonne, Planetoid und Erde. Die Winkel λ_S und λ_P bezeichnen die ekliptikale Länge von Sonne und Planetoid. a ist der Abstand der Erde von der Sonne (1 AE) und r der gesuchte Abstand des Planetoiden von der Sonne.

Für die nachfolgende Ableitung werden lediglich folgende Größen als bekannt vorausgesetzt: λ_S und λ_P zu je zwei Zeitpunkten, der Abstand a sowie die Zeit zwischen den Winkelmessungen. Die Winkel im Dreieck SEP sind zum Teil bekannt, und es können folgende Zusammenhänge abgeleitet werden.

$$\gamma = \lambda_S - \lambda_P \quad , \tag{1}$$

$$my = \Phi + (180° - \lambda_S) = 180° + \Phi - \lambda_S \quad . \tag{2}$$

Damit folgt:

$$\alpha = 180° - (180° + \Phi - \lambda_S) - (\lambda_S - \lambda_P) = \lambda_P - \Phi \quad . \tag{3}$$

Man kann nun für das Dreieck den Sinus-Satz der ebenen Trigonometrie aufschreiben:

$$\frac{r}{\sin(\lambda_S - \lambda_P)} = \frac{a}{\sin(\lambda_P - \varphi)} \quad . \tag{4}$$

Diese Beziehung gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt der Bahnbewegung der Himmelskörper. Um die Kinematik des Problems zu untersuchen, müssen wir nun eine zeitliche Veränderung der Winkel zulassen. Für ein beliebiges Zeitintervall Δt setzen wir an:

$$\begin{aligned} \lambda_S &= \lambda_{S0} + \Delta\lambda_S \quad , \\ \lambda_P &= \lambda_{P0} + \Delta\lambda_P \quad , \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{2\pi}{T_P}\,\Delta t \quad . \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei sind λ_{S0}, λ_{P0} und φ_0 die Winkel zu einem vorgegebenen Zeitpunkt t_0 , $\Delta\lambda_S$ und $\Delta\lambda_P$ die Winkeldifferenzen zu einem zweiten Zeitpunkt, T_P die Umlaufzeit des Planetoiden und Δt die Zeit zwischen den zwei Winkelmessungen. Der Ansatz in der letzten Zeile von Formel (5) setzt eine gleichförmige Kreisbewegung des Planetoiden voraus (*Annahme 2*).
Durch Einsetzen in Formel (4) erhält man:

$$a \cdot \sin[(\lambda_{S0} - \lambda_{P0}\ ) + (\Delta\lambda_S - \Delta\lambda_P\ )] = r \cdot \sin[\lambda_{P0} - \varphi_0 + \Delta\lambda_P - \frac{2\pi}{T_P}\Delta \tag{6}$$

Diese Formel gilt insbesondere für den Zeitpunkt t_0, d.h. für $\Delta\lambda_S = 0$, $\Delta\lambda_P = 0$ und $\Delta t = 0$. Dann gilt:

$$a \cdot \sin(\lambda_{S0} - \lambda_{P0}\ ) = r \cdot \sin(\lambda_{P0} - \varphi_0) \quad . \tag{7}$$

Die Formel (6) kann man unter Ausnutzung von Beziehungen der Winkelfunktionen auf folgende Weise umschreiben:

$$\begin{aligned} & a\cdot[\sin(\lambda_{S0}-\lambda_{P0})\cdot\cos(\Delta\lambda_S-\Delta\lambda_P)+\cos(\lambda_{S0}-\lambda_{P0})\cdot\sin(\Delta\lambda_S-\Delta\lambda_P)] \\ & = r\cdot[\sin(\lambda_{P0}-\varphi_0)\cdot\cos(\Delta\lambda_P-\frac{2\pi}{T_P}\Delta t)+\cos(\lambda_{P0}-\varphi_0)\cdot\sin(\Delta\lambda_P-\frac{2\pi}{T_P}\Delta t)]\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Nun nähern wir diese Formel unter der Voraussetzung, daß die Zeitpunkte der Winkelmessungen nicht allzulange auseinander liegen ($\Delta t / T_P \ll 1$) und die Winkeldifferenzen $\Delta\lambda_S$ und $\Delta\lambda_P$ (im Bogenmaß) klein gegen Eins sind. Dann kann man approximieren:

$$\begin{aligned} \sin(\Delta\lambda_S-\Delta\lambda_P) &\approx \Delta\lambda_S-\Delta\lambda_P \quad , \\ \sin(\Delta\lambda_P-\frac{2\pi}{T_P}\Delta t) &\approx \Delta\lambda_P-\frac{2\pi}{T_P}\Delta t \quad , \\ \cos(\Delta\lambda_S-\Delta\lambda_P) &\approx 1 \quad , \\ \cos(\Delta\lambda_P-\frac{2\pi}{T_P}\Delta t) &\approx 1 \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

Verwendet man diese Näherungen in Formel (8) und berücksichtigt die Formel (7), so ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$r\cdot\left(\Delta\lambda_P-\frac{2\pi}{T_P}\Delta t\right)\cdot\cos(\lambda_{P0}-\varphi_0) = a\cdot(\Delta\lambda_S-\Delta\lambda_P)\cdot\cos(\lambda_{S0}-\lambda_{P0})\ . \tag{10}$$

Alle Größen auf der rechten Seite dieser Gleichung sind bekannt. Auf der linken Seite fehlen uns außer dem gesuchten Abstand r auch noch die Größen T_P und φ_0 . Beide hängen auch vom Abstand r ab.

Die Umlaufzeit T_P können wir mit Hilfe des 3. Keplerschen Gesetzes berechnen:

$$\frac{1}{T_P} = \frac{1}{T_E}\left(\frac{a}{r}\right)^{3/2}\ . \tag{11}$$

Dabei ist T_E die Umlaufzeit der Erde um die Sonne.

Um den Winkel φ_0 durch andere Größen zu ersetzen, benutzen wir nochmals den Sinus-Satz nach Formel (4), der für den Zeitpunkt t_0 aufgeschrieben und mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras umgeformt wird:

$$\cos(\lambda_{P0} - \varphi_0) = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \cdot \sin^2(\lambda_{S0} - \lambda_{P0})} \quad . \tag{12}$$

Setzt man nun die Gleichungen (11) und (12) in die Gleichung (10) ein, so erhält man zwar eine recht komplizierte Gleichung, die aber als einzige unbekannte Größe nur noch den Abstand r enthält:

$$r \cdot \left(1 - \frac{A}{r^{3/2}}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2}} = B \quad . \tag{13}$$

Wobei gilt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi}{\Delta\lambda_P} \cdot \frac{\Delta t}{T_E} \cdot a^{3/2} \quad , \\ B &= a \cdot \frac{\Delta\lambda_S - \Delta\lambda_P}{\Delta\lambda_P} \cdot \cos(\lambda_{S0} - \lambda_{P0}) \quad , \\ C &= a \cdot \sin(\lambda_{S0} - \lambda_{P0}) \quad . \end{aligned} \tag{14}$$

Die Konstanten A, B und C hängen nur von bekannten Größen ab und können somit berechnet werden. Es bleibt die Gleichung (13) zu lösen. Diese kann offensichtlich nicht nach r umgestellt werden, so daß eine einfache analytische Lösung des Problems nicht möglich ist.

Man hat also nur die Chance der Lösung über ein Näherungsverfahren. Man bringt die Gleichung (13) in folgende Form, um ein Iterationsverfahren anzuwenden:

$$r = \frac{A}{\sqrt{r}} + \frac{B}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2}}} \quad . \tag{15}$$

Diese Formel eignet sich für eine iterative Lösung. Man kann auf der rechten Seite einen Startwert r_0 einsetzen und berechnet damit einen neuen Wert r_1 . Allgemein hat die Iterationsformel folgende Gestalt:

$$r_{n+1} = \frac{A}{\sqrt{r_n}} + \frac{B}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{r_n^2}}} \qquad \textbf{(16)}$$

Die Konstanten *A*, *B* und *C* sind in Formel (14) definiert. Sie brauchen also nur einmal berechnet zu werden.
Bei Anwendung des Verfahrens zeigte sich, daß die Folge der Werte r_n für $n \to \infty$ gegen den gesuchten Abstand *r* konvergiert.

Anwendung des Verfahrens

Für die praktische Bestimmung des Abstandes *r* eines Planetoiden von der Sonne kann die Iteration nach wenigen Schritten abgebrochen werden, da eine Genauigkeit von etwa 5% ausreicht. Die vereinfachenden Annahmen und Näherungen bei der Herleitung dieses Verfahrens lassen genauere Werte für den Abstand sowieso nicht zu.
Um die Berechnung zu vereinfachen, sollte man die Abstände in Astronomischen Einheiten (a = 1 AE) messen und die Zeit in Tagen (T_E = 365,25 d). Man beachte, daß die Winkel im Bogenmaß gemessen werden. Will man im Gradmaß arbeiten, hat man den Wert 2π in der Definition der Konstante *A* in Gleichung (11) durch 360° zu ersetzen. Als Startwert für die Iteration wählt man einen Abstand r_0 zwischen 1 AE und 10 AE .
Dieses Verfahren hat natürlich seine Grenzen. Es können keine Abstände berechnet werden, die kleiner als der Erdbahnradius sind, und das Verfahren versagt ebenfalls in der Nähe der Umkehrpunkte bei Planetenschleifen.
Die folgenden Beispiele für Abstandsbestimmungen bei großen Planeten belegen jedoch, daß das Verfahren brauchbare Ergebnisse liefert. Startwert war jeweils r_0 = 2 AE, und es waren nie mehr als fünf Iterationsschritte notwendig, damit sich zwei nacheinander iterierte Werte um weniger als 1% unterschieden.

Datum	λ_P	β_P	λ_S	Abstand	
				berechnet	Tabelle

Planet Mars					
09.12.1993	198,71°	+0,25°	167,30°	1,60 AE	1,57 AE
19.12.1993	205,33°	+0,14°	177,05°		
Planet Mars (rückläufig)					
03.01.1993	113,42°	+3,6°	282,62°	1,65 AE	1,61 AE
13.01.1993	109,73°	+3,9°	292,81°		
Planet Saturn					
09.12.1993	325,19°	-1,45°	256,92°	9,15 AE	9,78 AE
19.12.1993	325,93°	-1,43°	267,10°		

Genauere Untersuchungen des Iterationsverhaltens zeigen, daß eine kleinere Zeitdifferenz zu einem geringeren Fehler führt. Das ist wegen der Näherungen in Formel (9) auch plausibel.

Ein solches Iterationsverfahren bietet sich für die Umsetzung in Computer-Programm an. Der Verfasser hat ein Windows-Programm für astronomische Berechnungen mit Namen TAURUS geschrieben, das unter dem Menü-Punkt TOOLS / ABSTAND EINES PLANET(OID)EN dieses Verfahren realisiert. Interessenten können das Programm gegen Einsendung einer Diskette und eines ausreichend frankierten Rückumschlags vom Autor beziehen. Es bietet noch weitere nützliche Hilfsmittel an. Diese werden in einem weiteren Artikel vorgestellt.

Anschr. d. Verf.: Dr. Eckhardt Schön
Pädagogische Hochschule Erfurt/Mühlhausen
Institut für Physik
PF 307
D - 99006 Erfurt